Inspection d'académie de Tambacounda **Année scolaire : 2023/2024**

Cellule Régionale de mathématiques **Niveau : Seconde S**

Série n°1 : Calcul dans IR, Intervalles et Calcul approché

Exercice 1

1°) Dans chacun des cas suivants, calculer x^2 puis en déduire x.

a) $x=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$;

b) $x=\sqrt{12-3\sqrt{7}}-\sqrt{12+3\sqrt{7}}$

c) $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

2) Comparer les réels suivants :

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}$ et $\frac{\sqrt{6}}{2}+1$

b) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ et $\sqrt{5}-3$

c) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ et $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

d) $\sqrt{4\sqrt{2}-5}$ et $\frac{\sqrt{6}}{3}$;

Exercice 2

a , b , c et d sont des nombres réels strictement positifs:

1.a) Comparer : $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$

b) Application :

Comparer $\frac{3}{7}$ et $\frac{3+\sqrt{2}}{7+\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ et $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{\sqrt{5}+\sqrt{11}}$

2) Si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$

a) Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+d}$; $\frac{c}{d}$ et $\frac{a+c}{b+d}$

b) Application :

Ranger dans ordre croissant **:**

i) $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{4}$ et $\frac{8}{11}$ *ii)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$; $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}}$ et $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{17}}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}$

Exercice 3

Soit a , b et c trois réels.

1) Simplifier les expressions suivantes :

a) $A=\frac{(-a)^7\left(b^3c^2\right)^4}{-b^3c(-a)^4}$;

b) $B=\frac{\left(28\times12^{-2}\right)^3\times105^{-3}}{7^{-2}\times(-60)^{-4}\times63^4}:\left(\frac{5}{3}\right)^5$

2) Factoriser chacune des expressions suivantes :

$E=\left(a^2+b^2-9\right)^2-4a^2b^2$

$F=\left(9x^2-12x+4\right)+(x-3)^2-(2x+1)^2$

$G=(x+y)^3-x^3-y^3$

Exercice 4 :

Traduire chacune des inégalités suivantes en une appartenance de x à un intervalle.

1) $-3<x<2$

2) $x\geq3$ et $x\leq-4$

3) $-3\leq x<4$ Ou $-1\leq x\leq2$

4) $x\geq9$ *et* $2\leq x<10$

5) $x>4$ *ou* $x<8$

6) $x>4$ *ou* $x<8$

Exercice 5 :

On donne les intervalles: $A=[3\,;7]$, B=$[-3\,;5]$; $C=]-5\,;1[$ et D= $[-4\,;1]$.

1) Donner pour chacun de ces intervalles le centre, l'amplitude et le rayon.

2) Traduire à l'aide de la notion de valeur absolue l'appartenance de x à chacun des intervalles précédents par une inégalité.

3) Traduire à l'aide de la notion de distance l'appartenance de x à chacun des intervalles.

Exercice 6

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1°) $|3-3x|=5$;

2°) $|x+5|=x+5$

3°) $|2x+1|=-x+2$;

4°) $|-x+12|<-3+\sqrt{2}$

5°) $|4x-5|\geq3$;

6°) $d(x,3)=2d(x,-1)$;

7°) $|2x+3|-|2x+1|=3$

8°) $|-x-3|<3x+1$

9°) $|x-7|\geq0$

10°) $|3x+4|=2-\sqrt{5}$

11°) $|2-4x|\leq3$

Exercice 7

Soit x, y et z trois réels strictement positifs.

1) Montrer que:

a) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq2$

b) $\frac{1}{x+y}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

c) $\sqrt{x+y}<\sqrt{x}+\sqrt{y}$

2) Montrer que si $x<y$ *alors* $x<\sqrt{xy}<y$

3) si $x\in]0\,;1[$ et $y\in]0\,;1[$.

a) Quel est le signe de $(1-x)(1-y)$?

b) Comparer: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ et $1+\frac{1}{xy}$.

Exercice 8 :

Soit a , b et c trois réels de l'intervalle $]0\,,1[$.

1) Montre que le produit de deux réels de l'intervalle $]0\,,1[$ est un réel de l'intervalle $]0\,,1[$.
2) En déduire que : $(ab-1)(bc-1)(ac-1) \leq 0$.
3) Développer $(ab-1)(bc-1)(ac-1)$ et en déduire que :
$a+b+c+1+\frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc.$

Exercice 9

1) Montrer que : $a^2+b^2 \geq 2ab$; quels que soient les réels a, b.
2) a, b et c *sont* des réels strictement positifs, montrer que:
$(a^2+b^2)c+(b^2+c^2)a+(c^2+a^2)b \geq 6abc$
3) Soient x , y *et* z trois nombres réels, montrer que:
$xy+xz+yz \leq x^2+y^2+z^2$

Exercice 10

Soit x , y et z des réels strictement positifs.

1) Prouver que :
   a) $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$
   b) $\frac{8}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} \leq \frac{2}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

2) Démontrer que *:*
$\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$ et que $\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$.

3) Démontrer que *:*

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}+\frac{y+z}{y^2+z^2}+\frac{z+x}{z^2+x^2} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Exercice 11

Soient 4 entiers naturels consécutifs n, $n+1$, $n+2$, $n+3$; $n > 0$.

1.a) Démontrer que:
$(n+1)(n+2) = n(n+3)+2$

b) On pose $(n+1)(n+2) = \alpha$
Exprimer en fonction de α le produit
$p = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

c) En déduire que $p+1$ est le carré d'un entier (on dit carré parfait).

2) Déterminer n sachant que $p = 5040$.

Exercice 12

Soit a, b, c trois nombres réels non nuls tels que $ab+bc+ca=0$.

Calculer la somme $S=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$.

Exercice 13

Soit a, b, c trois nombres réels.

1) Développer $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ puis $(a+b+c)^3$.
2) Démontrer que si : $a+b+c=0$ alors $a^3+b^3+c^3=3abc$.
3) En déduire que, pour tous réels x, y, z on a :
$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$

Exercice 14

Soit n un entier naturel ;

1) Ecrire sans radical au dénominateur $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
2) En déduire une expression simple de
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

Exercice 15

Soit n un entier naturel non nul.

1) Prouver que $\sqrt{2n-1}\times\sqrt{2n+1} < 2n$.
2) En déduire que : $\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$.
3) Démontrer que :
$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Exercice 16

1) Soit $-7{,}4 \leq x \leq -7{,}3$.

a) Donner une valeur approchée de x et préciser l'incertitude.

b) Donner une valeur approchée de x par excès et par défaut et préciser dans chaque cas l'incertitude.

2) Traduire les phrases suivantes par un encadrement

a) 1,21 est une valeur approchée de x à 2.10^{-2} près

b) 2,25 est une valeur approchée de x par défaut à 10^{-3} près

c) 3,12 est une valeur approchée de x par excès à 2.10^{-1} près.

Exercice 17 :

1) Résoudre l'inéquation $|x-3| \leq \frac{1}{3}$.

2) Sachant que: $\left|\sqrt{30}-5{,}4772\right| \leq 5.10^{-5}$ encadrer 30 à 125.10^{-6} près puis donner une valeur approchée de 30 à 125.10^{-6}.

3) On a : $2{,}1 < x < 2{,}2$ *et* $3{,}3 < y < 3{,}4$. Encadrer x – y.

4) On a : $-1{,}5 < x < -1{,}4$ *et* $-0{,}9 < y < -0{,}8$. Encadrer $x\,y$; $\frac{x}{y}$ puis $3\,x - 2\,y$.